которое характеризует вырождение поверхности (A_i) в линию.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.-Тр.геом.семинара ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, 113-133.

2. Ф и н и к о в С.П. Проективно-дифференциальная геометрия. М.-Л., ОНТИ, 1937.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 11 1980

Н.А. М и р о ш к и н а

ПРОЕКТИВНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ ПРЯМЫХ В ПЯТИМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ P_5

В статье дана фокальная классификация трехпараметрических семейств прямых в P_5 по кратности фокусов и наличию голономных фокальных двухпараметрических подсемейств.

Отнесем пространство P_5 к проективному реперу A_α $(\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, 5)$. Уравнения инфинитезимального перемещения репера и уравнения структуры имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{1}$$

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta. \tag{2}$$

Рассмотрим произвольную прямую L_1 трехпараметрического семейства прямых $(L_1)_3$. Определим ее точками A_i репера $(i, j = 0, 1)$. Считая точку A_0 неособой, можно формы ω_0^p $(p, q = 2, 3, 4)$ принять за базисные. Трехпараметрические семейства прямых можно трактовать как линейчатую гиперповерхность V_{1+3} в P_5. Поместим точки A_i, A_p репера в гиперплоскость, касательную к поверхности в точке A_0. Тогда уравнения семейства будут иметь вид:

$$\omega_1^a = \ell_{1q}^a \omega_0^q, \quad \omega_0^5 = 0 \quad (a, b = 2, 3, 4, 5). \tag{3}$$

Однопараметрическое подсемейство называется торсом, если в этом подсемействе бесконечно близкие прямые пересекаются в точке, называемой фокусом, и, следовательно, лежат в двумерной плоскости, называемой фокальной плоскостью торса. Если образующая $[A_0A_1]$ поверхности V_{1+3} имеет „k" фокусов, то поверхность называется поверхностью типа k и обозначается $_kV_{1+3}$ ([1],[2]).

Рассмотрим поверхность типа $2-{}_2V_{1+3}$. Поместим в фокальные плоскости точки A_1, A_2, A_3 репера. Матрица коэффициентов уравнений (3) примет вид:

$$\Lambda_2 = \begin{Vmatrix} \ell^2_{12} & \ell^2_{13} & \ell^2_{14} \\ 0 & \ell^3_{13} & \ell^3_{14} \\ 0 & 0 & \ell^4_{14} \\ 0 & 0 & \ell^5_{14} \end{Vmatrix}$$

Преобразованием репера матрица Λ_2 может быть приведена к одному из трех видов:

$$\Lambda^1_2 = \begin{Vmatrix} \ell^2_{12} & 0 & \ell^2_{14} \\ 0 & \ell^3_{13} & \ell^3_{14} \\ 0 & 0 & \ell^4_{14} \\ 0 & 0 & \ell^5_{14} \end{Vmatrix} \quad \Lambda^2_2 = \begin{Vmatrix} \ell^2_{12} & 0 & \ell^2_{14} \\ 0 & \ell^2_{12} & \ell^3_{14} \\ 0 & 0 & \ell^4_{14} \\ 0 & 0 & \ell^5_{14} \end{Vmatrix} \quad \Lambda^3_2 = \begin{Vmatrix} \ell^2_{12} & 1 & \ell^2_{14} \\ 0 & \ell^2_{12} & \ell^3_{14} \\ 0 & 0 & \ell^4_{14} \\ 0 & 0 & \ell^5_{14} \end{Vmatrix}$$

В первом случае прямая $[A_0A_1]$ семейства прямых имеет два различных фокуса с фокальными направлениями ω^2_0 $(\omega^3_0 = \omega^4_0 = 0)$ и ω^3_0 $(\omega^2_0 = \omega^4_0 = 0)$. Каждая из фокальных плоскостей $^1L_2 = [A_0A_1A_2]$ и $^2L_2 = [A_0A_1A_3]$ описывает трехпараметрическое семейство-конгруэнцию. В общем случае конгруэнция двумерных плоскостей в P_5 не обладает семействами торсов, то есть такими однопараметрическими подсемействами, в которых плоскость пересекается с бесконечно близкой плоскостью по прямой, называемой характеристикой (следовательно, эти плоскости лежат в трехмерной плоскости-фокальной плоскости конгруэнции). Фокальные плоскости семейства прямых $^1L_2$, $^2L_2$ описывают конгруэнции, обладающие одним семейством торсов.

Если рассматриваемое семейство прямых обладает фокальным голономным двухпараметрическим подсемейством, то каждая из фокальных поверхностей, описанных фокусами прямой $[A_0A_1]$, расслаивается на ∞^1 двумерных поверхностей, несущих сопряженную сеть, соответствующую торсам. Фокальные плоскости $^1L_2$, $^2L_2$ будут описывать конгруэнции, обладающие двумя семействами торсов.

Если матрица коэффициентов уравнений (3) имеет вид Λ^2_2, то прямая $[A_0A_1]$ семейства несет сдвоенный фокус, а семейство прямых $(L_1)_3$ расслаивается на конусы с вершиной в сдвоенном фокусе.

Если матрица коэффициентов уравнений (3) имеет вид Λ^3_2, то прямая $[A_0A_1]$ несет также сдвоенный фокус, но расслоения на конусы нет. Фокальное направление является асимптотическим направлением первого порядка.

Рассмотрим фокальные семейства прямых. Касательная плоскость к линейчатой поверхности V_{1+3} будет постоянна [1]. Поместив в эту плоскость точки A_i, A_p, сведем уравнения (3) к виду:

$$\omega^5_i = 0, \tag{4}$$

$$\omega^p_1 = \ell^p_{1q}\,\omega^q_0. \tag{5}$$

Преобразованиями репера матрицу коэффициентов уравнений (5) можно привести к одному из следующих видов:

$$\Lambda^1_3 = \begin{Vmatrix} \ell^2_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \ell^3_{13} & 0 \\ 0 & 0 & \ell^4_{14} \end{Vmatrix}, \Lambda^2_3 = \begin{Vmatrix} \ell^2_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \ell^2_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \ell^4_{14} \end{Vmatrix}, \Lambda^3_3 = \begin{Vmatrix} \ell^2_{12} & 1 & 0 \\ 0 & \ell^2_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \ell^4_{14} \end{Vmatrix},$$

$$\Lambda_3^4=\begin{Vmatrix} \ell_{12}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \ell_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \ell_{12}^2 \end{Vmatrix}, \Lambda_3^5=\begin{Vmatrix} \ell_{12}^2 & 1 & 0 \\ 0 & \ell_{12}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \ell_{12}^2 \end{Vmatrix}, \Lambda_3^6=\begin{Vmatrix} \ell_{12}^2 & 1 & 0 \\ 0 & \ell_{12}^2 & 1 \\ 0 & 0 & \ell_{12}^2 \end{Vmatrix}$$

В первом случае прямая $[A_0 A_1]$ семейства несет три различных фокуса $L_0^1 = A_1 - \ell_{12}^2 A_0$, $L_0^2 = A_1 - \ell_{13}^3 A_0$, $L_0^3 = A_1 - \ell_{14}^4 A_0$ с фокальными направлениями ω_0^2, ω_0^3, ω_0^4. Каждая из фокальных плоскостей ${}^{p-1}L_2 = [A_0, A_1, A_p]$ описывает конгруэнцию, обладающую одним семейством торсов ω_0^p. Каждая фокальная плоскость конгруэнции описывает трехпараметрическое семейство, обладающее одним семейством торсов.

Если фокальные семейства прямых обладают одним голономным фокальным двухпараметрическим подсемейством $\omega_0^p = 0$, то фокальные поверхности L_0^{q-1} $(q \neq p)$ расслаиваются на ∞^1 двумерных поверхностей, несущих сопряженную сеть, соответствующую торсам ω_0^q. Фокальные плоскости ${}^{q-1}L_2$ $(p \neq q)$ описывают конгруэнции, имеющие два семейства торсов.

Если фокальные семейства прямых будут обладать двумя голономными двухпараметрическими фокальными подсемействами, то возможны три случая. В первом случае семейство становится вполне фокальным, то есть все три уравнения $\omega_0^p = 0$ вполне интегрируемы. Каждая из трех фокальных поверхностей несет сопряженную сеть, соответствующую фокальной. Каждая из фокальных плоскостей описывает фокальные конгруэнции с той же голономной фокальной сетью и является соприкасающейся плоскостью второго порядка к линиям $\tilde{\omega}_0^q$ трех фокальных поверхностей $({}^{p-1}L_0^{q-1\,q-1})$. Во втором случае касательное пространство $[A_0 A_1 A_2 A_3 A_4]$ зависит от двух параметров, а поверхность, описанная прямой $[A_0 A_1]$, имеет двумерную образующую. В третьем случае касательное пространство зависит от одного параметра, и поверхность имеет трехмерную образующую.

Прямая $[A_0 A_1]$ фокальных семейств с матрицей коэффициентов Λ_3^2 несет один сдвоенный и один простой фокус. В этом случае семейство расслаивается на конусы с вершиной в сдвоенном фокусе.

Матрица Λ_3^3 задает фокальные семейства, текущая прямая которых несет один сдвоенный и один простой фокус. Сдвоенный фокус описывает фокальную трехмерную поверхность, на которой фокальное направление является асимптотическим.

Прямая $[A_0 A_1]$ фокального семейства с матрицей коэффициентов Λ_3^4 несет строенный фокус. Этот фокус неподвижен. Семейство прямых - конус с вершиной в строенном фокусе.

Если матрица коэффициентов имеет вид Λ_3^5, то строенный фокус прямой $[A_0 A_1]$ описывает двумерную поверхность.

Прямая фокального семейства с матрицей коэффициентов Λ_3^6 несет строенный фокус, описывающий трехмерную поверхность, на которой фокальное направление является асимптотическим.

Список литературы

1. А к и в и с М.А. ДАН СССР, I46, №3, 1962, 515-518.
2. В а к с м а н В.С. Тр. Моск. ин-та инж. ж-д транс. 1965, 222, 5-12.